Mat. Böl. Dif. Denk. I Büt. 21.01.2019

1) $y' = 3 - \frac{2}{y-3x+5}$, $y(-1)=0$ 2) $y' = \frac{y^2\sin x + e^x + x}{2y\cos x + y^2}$, $y(0)=1$

3) $2yy' + \frac{1}{x}\ln y^2 + x(\ln y)^2 = 0$, $y(1)=e$

4) $(1,-1)$ noktasından geçen doğru ailesinin $(0,-1)$ noktasından geçen dik yörüngesi varsa bulunuz.

5) $y_1 = 2$, $(x+1)y' - y^2 + 3y - 2 = 0$ denkleminin bir özel çözümü olduğuna göre bu denklemin genel çözümünü bulunuz.

6) $f(x,y)$ fonksiyonu sıfırıncı dereceden homojen olduğuna göre $y' = f(x,y)$ denkleminin çözülüp-çözülmeyeceğini gösteriniz.

($u = y^{1-\alpha}$, $u' + (1-\alpha)P(x)u = (1-\alpha)Q(x)$, $y = y_1 + \frac{1}{u}$, $u' - (2P(x)y_1 + Q(x))u = P(x)$

Not: Sadece dört soru çözünüz. Başarılar N.A.

ÇÖZÜMLERİ

1) 3 a) dır. $u = y - 3x + 5 \Rightarrow u' = y' - 3 \Rightarrow y' = u' + 3$ olur. Denk. de yerine yazılırsa $u' + \cancel{3} = \cancel{3} - \frac{2}{u} \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{2}{u} \Rightarrow u\,du = -2dx$

$\frac{u^2}{2} = -2x + c \Rightarrow \frac{(y-3x+5)^2}{2} = -2x + c$ genel çözüm. $y(-1)=0$ olması için $x=-1$, $y=0$ alınırsa $\frac{(0-3.(-1)+5)^2}{2} = -2(-1) + c \Rightarrow \frac{8^2}{2} = 2 + c$

$\frac{64}{2} = 2 + c \Rightarrow c = 30$ olur. Böylece çözüm $\frac{1}{2}(y-3x+5)^2 = -2x + 30$ olur.

—o—

2) Denklem $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2\sin x + e^x + x}{2y\cos x + y^2} \Rightarrow \underbrace{(y^2\sin x + e^x + x)}_{P}dx \underbrace{-(2y\cos x + y^2)}_{Q}dy = 0$

$P_y = 2y\sin x$ $Q_x = 2y\sin x \Rightarrow P_y = Q_x$ old. dan denk TD dır.

$\int(y^2\sin x + e^x + x)dx + \int(-2y\cos x - y^2)dy = \int 0.dx$

$\cancel{-y^2\cos x} + e^x + \frac{1}{2}x^2 - y^2\cos x - \frac{1}{3}y^3 = c$ genel çözüm bulunur. $y(0)=1$ olması için $x=0$, $y=1$ alınırsa $e^0 + 0 - 1^2\cos 0 - \frac{1}{3}1^3 = c \Rightarrow c = -\frac{1}{3}$ olur.

İstenen çözüm $e^x + \frac{1}{2}x^2 - y^2\cos x - \frac{1}{3}y^3 = -\frac{1}{3}$ olur.

4) Genel doğru denklemi $y=mx+n$ dir. $(1,-1)$ den geçmesi için $x=1,\ y=-1$ alınırsa $-1=m+n \Rightarrow n=-1-m$ olur. Böylece $(1,-1)$ den geçen doğru ailesi

$$\left.\begin{aligned} y&=mx-1-m \\ y'&=m \end{aligned}\right\}$$ olur. Bir kez türev alırsak Bunlar arasında m yok edilirse

$y=y'x-1-y'$ dif. denk. bulunur. Dik yörünge istendiği için $y' \to -\frac{1}{y'}$ yazılırsa $y=-\frac{1}{y'}x-1+\frac{1}{y'}$ olur. Düzenlirse

$$y+1=\frac{1}{y'}(1-x) \Rightarrow y'=\frac{1-x}{y+1} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1-x}{y+1} \Rightarrow \int(y+1)dy=\int(1-x)dx$$

$\frac{y^2}{2}+y=x-\frac{x^2}{2}+b$ olur. (Veya $\int(y+1)dy=-\int(x-1)dx$

$\frac{(y+1)^2}{2}=-\frac{(x-1)^2}{2}+b \Rightarrow (y+1)^2+(x-1)^2=2b$) $(0,-1)$ noktasından geçen istendiği için $x=0,\ y=-1$ alınırsa

$\frac{(-1)^2}{2}-1=0-\frac{0^2}{2}+b \Rightarrow b=-\frac{1}{2}$ olur. yani $\frac{y^2}{2}+y=x-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}$ olur.

—o—

5) Denklem RD dir. $(x+1)y'-y^2+3y-2=0 \Rightarrow y'-\underbrace{\frac{1}{x+1}}_{P(x)}y^2+\underbrace{\frac{3}{x+1}}_{Q(x)}y-\frac{2}{x+1}=0$

$y_1=2$ old. dan $y=2+\frac{1}{u}$ dönş. uyg.

denklem $u'-(2P(x)y_1+Q(x))u=P(x) \Rightarrow u'-\left(2\cdot-\frac{1}{x+1}\cdot 2+\frac{3}{x+1}\right)u=-\frac{1}{x+1}$

$u'-\left(\frac{-4+3}{x+1}\right)u=-\frac{1}{x+1} \Rightarrow u'+\frac{1}{x+1}u=-\frac{1}{x+1}$ 1.D olur. İntegral çarpanı yöntemiyle $\lambda(x)=e^{\int\frac{1}{x+1}dx}=x+1$ olur. ise

$(x+1)u=\int(x+1)\cdot\frac{-1}{x+1}dx+c \Rightarrow (x+1)\cdot\frac{1}{y-2}=-x+C$ olur.

—o—

6) $f(x,y)$ SDH ise $y'=f(x,y)$ de SDH dir. $y=ux,\ y'=u'x+u$ uyg. $u'x+u=f(x,ux) \Rightarrow f(x,y)$ SDH ise $f(x,ux)=f(1,u)$ olur

O halde $u'x=f(1,u)-u \Rightarrow \frac{du}{dx}x=f(1,u)-u \Rightarrow \frac{1}{f(1,u)-u}du=\frac{dx}{x}$ sek. denk DA olur. int. alınır ve sonunda

$u=\frac{y}{x}$ yazılırsa $y'=f(x,y)$ denk genel çözümü bulunur.